

IH 空洞の概略設計

新井 重昭

国立研究開発法人理化学研究所 仁科加速器研究センター

1 はじめに

IH のドリフトチューブ寸法、空洞寸法、それに RF 特性が電磁気学の解析的な基本式を使用した計算コード CADIH で計算された。CADIH は π モード加速の IH 構造を概算することが出来る。計算に必要な入力パラメータが表 1.1 にまとめられている。4 行目は共振周波数を探すためのパラメータである。計算の中で使用される空洞寸法の表記パラメータが図 1.1 に示されている。

表 1.1 : CADIH の入力パラメータ

目標周波数 F (Hz)	質量対電荷比 A/Q	同期位相 FAIS (deg.)	入射エネルギー TIN (MeV/u)	出射エネルギー TOUT (MeV/u)	ギャップ 電圧 VG0 (kV)
空洞半径 RT (m)	リッチ 高さ HR (m)	リッチ 幅 WR (m)	リッチ 切除高さ HRC (m)	エンドギャップ 長 ZEG (m)	リッチ 切除長 ZRC
最小限リッチ 根元長 ZRB	エンドギャップ 半径 REC	ドリフトチューブ 外半径 RD (m)	ドリフトチューブ 内半径 A (m)	ステム半径 RS (m)	ギャップ 長 ZG
初期周波数 F0	周波数増加分 DF0	計算回数 NF			

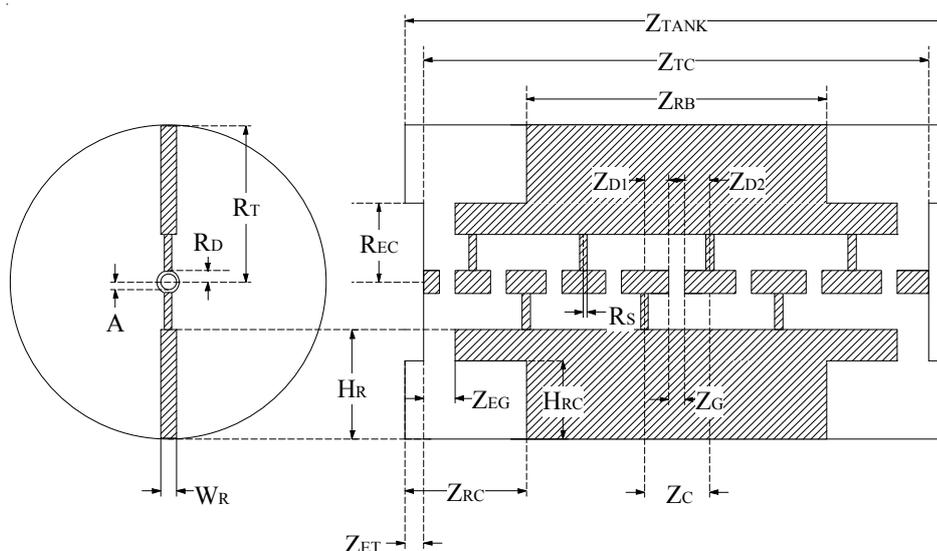


図 1.1 : CADIH で使われた IH 空洞の寸法表記パラメータ。

先ず CADIH を走らせる前に、表 1.1 の CADIH に入力する初期パラメータが、ビームシミュレーションで決められた運転周波数、加速ギャップ電圧、ビーム径等を勘案して適当に設定される。次に、CADIH によって、これ等のパラメータを持つ IH 空洞の等価回路定数や高周波特性（シャント抵抗、電力損失等）が計算され、引き続いて空洞の等価回路を使って、ドリフトチューブに沿った電圧分布が平らになる共振周波数が求められる。そして、得られた共振周波数が設計目標値に近づくまで入力パラメータ（主に $R_T, H_R, H_{RC}, Z_{EG}, Z_{RC}$ ）を変えながら繰り返し計算し、入力パラメータの最終値、即ち、設計値を決定する。

2. ドリフトチューブの寸法

CADIH では先ず、加速空洞の心臓部である加速電極、即ちドリフトチューブの寸法が粒子の入射エネルギーと加速電圧から決められる。表 2.1 には CADIH で計算された 51-MHz IH1^[1] のドリフトチューブの寸法が与えられている。ここで議論される 51-MHz IH は周波数を 52 MHz に変更し TRIAC-IH として使用された物である。この表には各セルの入出射エネルギー (T)、トランジットタイムファクター (TF)、入口から各セル末端までの距離 (Daxial)、セル長 (ZC)、ギャップ長 (ZG)、加速ギャップ前後のドリフトチューブ長 (ZD1, ZD2)、ドリフトチューブの外半径 (RD) と内（開口）半径 (A) がまとめられている。加速電極の単位セルは、図 2.1 に示すように、ドリフトチューブの中央から加速ギャップを挟んで次のドリフトチューブの中央までと定義される。この時、セル長は $Z_C = Z_{D1} + Z_G + Z_{D2}$ で与えられる。

単位セルの軸方向の寸法は、粒子が隣り合う加速ギャップの中心を通過する際に加速 RF と同期するように決められる。計算を簡単にする為に、粒子のエネルギーが加速ギャップの中心で矩形階段状に増加する瞬時加速近似が使用される。先ず加速ギャップ長 Z_G は、IH へ入射するイオンの周期長 $\beta_0 \lambda$ の 1/4 を目安として決められる。

表2.1 : 51-MHz IH1のドリフトチューブ表

NC	T (keV/u)	TF	Daxial (m)	ZC (m)	ZG (m)	ZD1 (m)	ZD2 (m)	RD (m)	A (m)
1	170.0	0.8280	0.0568	0.0568	0.0290	0.0136	0.0142	0.0190	0.0100
2	177.5	0.8346	0.1154	0.0586	0.0290	0.0142	0.0154	0.0190	0.0100
3	192.5	0.8465	0.1763	0.0609	0.0290	0.0154	0.0166	0.0190	0.0100
4	207.7	0.8570	0.2396	0.0632	0.0290	0.0166	0.0177	0.0190	0.0100
5	223.1	0.8662	0.3050	0.0655	0.0290	0.0177	0.0188	0.0190	0.0100
6	238.7	0.8744	0.3727	0.0677	0.0290	0.0188	0.0199	0.0190	0.0100
7	254.5	0.8817	0.4425	0.0698	0.0290	0.0199	0.0209	0.0190	0.0100
8	270.3	0.8883	0.5144	0.0719	0.0290	0.0209	0.0220	0.0190	0.0100
9	286.3	0.8942	0.5878	0.0734	0.0290	0.0220	0.0225	0.0190	0.0100
	294.4								

$$Z_G \approx \frac{\beta_0 \lambda}{4} \quad (2.1)$$

ここで、 β_0 はイオンの入射速度、 λ は加速 RF の自然波長である。加速ギャップ長は加速電場を一様にするために同一空洞の中では全てのセルで同じ値に保たれる。次に加速ギャップの中心通過後のエネルギーに相当する速度から次の加速ギャップの中心までの π モード加速の同期長（即ち、1/2 周期長） $\beta\lambda/2$ が決められ、これから加速ギャップ間に配置されるドリフトチューブ長が決められる。

n 番目のセルのイオン出射速度 β_n は、加速ギャップ通過後のイオンの核子当たりの運動エネルギー T_n から求められる。 n 番目セルの加速ギャップを通過する前後のイオンのエネルギーを T_{n-1} 、 T_n とすると次の関係式が得られる。

$$T_n = T_{n-1} + e\varepsilon VT_F \cos\phi_s \quad (2.2)$$

$$T_F = \frac{\sin\left(\frac{\pi Z_G}{\beta\lambda}\right)}{\frac{\pi Z_G}{\beta\lambda}} \frac{1}{I_0\left(\frac{2\pi a}{\beta\lambda}\right)} \quad (2.3)$$

ここで、(2.2)式の e は電子の電荷、 ε は荷電質量数比(q/A)、 V は加速ギャップ電圧、 T_F はトランジットタイムファクター、 ϕ_s は同期位相で、(2.3)式の Z_G はギャップ長、 a はドリフトチューブの開口半径である。

n 番目のセルのイオン出射運動エネルギーを T_n 、核子の静止質量を m_0c^2 （ここでは、 $1\text{amu}=931.5\text{MeV}/c^2$ が使用される）とすると、 n 番目セルのギャップ中心から $n+1$ 番目セルのギャップ中心までの距離（イオンが進む 2 分の 1 周期長: $\beta_n\lambda/2$ ）が次の関係式を使って求められる。

$$\beta_n \gamma_n = \frac{(T_n^2 + 2T_n m_0 c^2)^{1/2}}{m_0 c^2} \quad (2.4)$$

$$\gamma_n = \frac{T_n + m_0 c^2}{m_0 c^2} \quad (2.5)$$

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (2.6)$$

n 番目のセルのギャップ前のドリフトチューブ長 Z_{D1} は $n-1$ 番目のセルのイオン出射速度 β_{n-1} を使って次のように求められる。

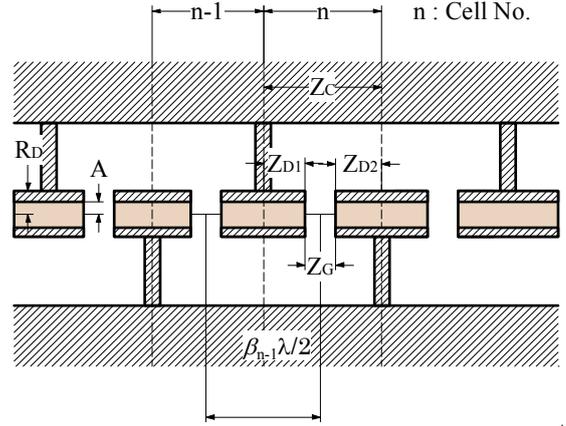


図 2.1 : 加速セルの説明図。

$$Z_{D1} = \frac{\beta_{n-1}\lambda/2 - Z_G}{2} \quad (2.7)$$

他方、ギャップ後のドリフトチューブ長 Z_{D2} は n 番目のセルのイオン出射速度 β_n を使って次のように求められる。

$$Z_{D2} = \frac{\beta_n\lambda/2 - Z_G}{2} \quad (2.8)$$

3 空洞の寸法

3.1. 空洞内径

空洞両端のセルを除いた単位セルの静電容量は主にドリフトチューブ寸法によって決まり、タンクインダクタンスは主にタンクの内径によって決まる。この特性を利用して、IH空洞の内径は、空洞両端のセルを除いた単位セルの共振周波数の平均値を運転周波数 f_0 に合わせることによって決められる。 n 番目のセルの共振周波数 $f(n)$ は n 番目のセルの電極静電容量 $C(n)$ とタンクインダクタンス $L(n)$ によって次のように与えられる。

$$f(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(n)C(n)}} \quad (3.1)$$

共振周波数の平均値は加速セル数を N_C とすると次のようになる。

$$f_{av.} = \frac{f(2) + f(3) + \dots + f(N_C - 1)}{N_C - 2}$$

3.1.1. 両端のセルを除いた単位セルの静電容量

両端のセルを除いた n 番目のセル電極の静電容量 $C(n)$ はドリフトチューブギャップの静電容量 C_G 、ドリフトチューブとリッジ間の静電容量 C_{DR} 、リッジ間の静電容量 C_R の和から成ると仮定する。

$$C(n) = C_G + C_{DR} + C_R \quad (3.2)$$

ドリフトチューブギャップの静電容量 C_G はドリフトチューブの対向面間に生じる容量 C_{G1} とドリフトチューブの外径と内径の側面間に生じる容量 C_{G2} 、 C_{G3} の和である。これ等の静電容量は、2枚の平行平板の間に発生する静電容量の式と、アース面に対して平行で垂直に置かれた無限に長い薄い板とアース面との間に発生する単位長さ当りの静電容量を表す式を利用して求められる。前者は電極対向面積を S 、面間距離を d とすると次式で表される。

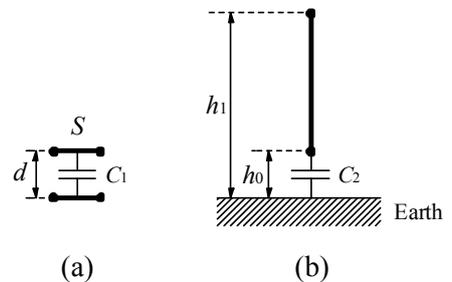


図 3.1 : (a)平行平板間と(b)アースに垂直な薄板とアース間の静電容量を表す模式図。

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (3.3)$$

ここで ε_0 は真空の誘電率で 8.854×10^{-12} F/m である。後者は図 3.1(b) に示すように、アース面から垂直に置かれた薄い板の下端と上端までの距離をそれぞれ h_0 、 h_1 とすると次式で与えられる。

$$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0(h_1 - h_0)}{(h_0 - h_1)\log\left(\frac{h_0 - h_1}{2}\right)^2 + \frac{h_0 + 3h_1}{2}\log\left(\frac{h_0 + 3h_1}{2}\right)^2 - \frac{h_1 + 3h_0}{2}\log\left(\frac{h_1 + 3h_0}{2}\right)^2} \quad (3.4)$$

ドリフトチューブ対向面間の容量 C_{G1} は(3.3)式に $S = \pi(R_D^2 - a^2)$ 、 $d = Z_G$ を代入して求められる。他方、ドリフトチューブ外径側面間の容量 C_{G2} は、(3.4)式が薄い板の両面とアース間の静電容量であるから、(3.4)式に $h_0 = Z_G/2$ 、 $h_1 = h_0 + (Z_{D1} + Z_{D2})/2$ を代入し、ドリフトチューブの外周長 $2\pi R_D$ を掛けて得られた値の 1/4 になり、内径側面間の容量 C_{G3} はドリフトチューブの内周長 $2\pi a$ を掛けて得られた値の 1/4 になる。

ドリフトチューブとリッジ間の静電容量 C_{DR} は平行に置かれた無限に長い円柱間の単位長当りの静電容量と平行に置かれた無限に長い四角柱間の単位長当りの静電容量の平均値にドリフトチューブ長を掛けて近似的に求められた。この近似で使われた半径 R_D のドリフトチューブと幅 W_R のリッジの位置関係が図 3.2(a) に、ドリフトチューブと同じ半径を持つ円柱間の位置関係が図 3.2(b) に、リッジと同じ幅と高さを持つ四角柱間の位置関係が図 3.2(c) に示されている。この円柱間の単位長当りの静電容量は次式で与えられる。

$$C = \varepsilon_0 \pi / \left(\log \frac{D}{R_D} \right) \quad (3.5)$$

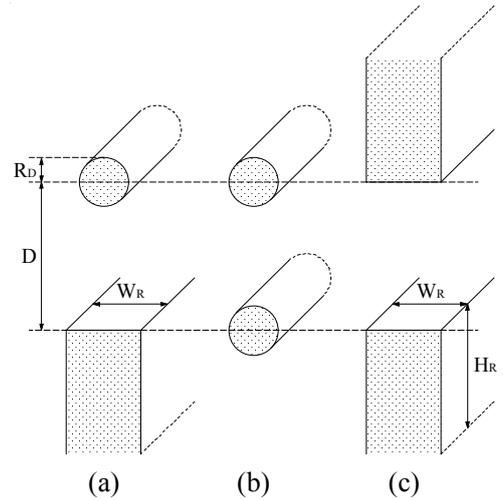


図 3.2 : 電極(a)の静電容量は電極(b)(c)の容量の平均値として求められた。

四角柱間の単位長当りの静電容量は(3.3)式と(3.4)式を利用して求められる。

リッジ間の静電容量 C_R はリッジの対向面 ($Z_G \times W_R$) と側面 ($Z_G \times H_R$) によって作られる静電容量の和として、(3.3)式と(3.4)式を利用して求められる。

3.1.2. 両端のセルを除いた単位セルのインダクタンス

両端のセルを除いた n 番目の加速セルのインダクタンス $L(n)$ はタンクインダクタンス $L_T(n)$ とステムインダクタンス $L_S(n)$ の和であると仮定される。

$$L(n) = L_T(n) + L_S(n) \quad (3.6)$$

空洞長が空洞径に比べ十分長い場合には、空洞のタンクインダクタンス L_T は空洞内の軸方向の

磁束密度 B が一様であると仮定して求められる。リッジに沿った軸方向の磁場を H 、磁束密度を B 、リッジの電流を I 、磁場の横切る空洞断面積を S 、磁束を ϕ とすると、次の様な電磁場の方程式が得られる。

$$\text{rot}H = I \quad (3.7)$$

$$\phi = L_T I = BS \quad (3.8)$$

空洞長 \approx リッジ長 $\approx l$ とすると(3.7)式は次式で近似される。

$$H = I/2l \quad (3.9)$$

これを(3.8)式に代入すると空洞のタンクインダクタンスが次のように求まる。

$$L_T = BS/I = \mu_0 HS/I = \mu_0 S/2l \quad (3.10)$$

同じ様に、 n 番目のセルのタンクインダクタンス $L_T(n)$ は、電流 I をセル内のリッジ電流と見なし、空洞長 l をセル長 $Z_C(n)$ で置き換えれば次式で与えられる。

$$L_T(n) = \mu_0 S/2Z_C(n) \quad (3.11)$$

しかし、最近のIH構造の設計では、空洞長が空洞径に比べ十分長くなる事はめったになく、上記の仮定に基づくインダクタンスでは実際の値との誤差が大きくなりすぎる。そこで、空洞長と空洞径に余り差が無い場合でも、概算値が実際値に近くなるように次の様な概算方法が用いられた。

図3.3に示されるように、空洞側面から見たリッジの形状は、空洞両端部の磁場反転用切欠きによって、T字形をしていて、空洞に固定される部分はドリフトチューブが取り付けられている部分より短くなっている。それ故、図3.3に n 本の等間隔の赤線を示すように、リッジを流れる電流密度は空洞壁に固定されている長さ(図3.4の $Z_{TANK}-2Z_{RC}$)の範囲で一様であると仮定し、この電流によって作られる図3.3のABで切った断面の磁束 ϕ から空洞全体のタンクインダクタンス L_T が求められた。

具体的には、下側のリッジの電流による磁束から求めたインダクタンスを2倍して空洞全体のタンク

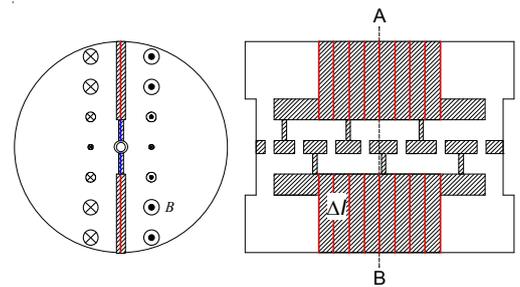


図 3.3 : 左は右の AB で切った断面図。

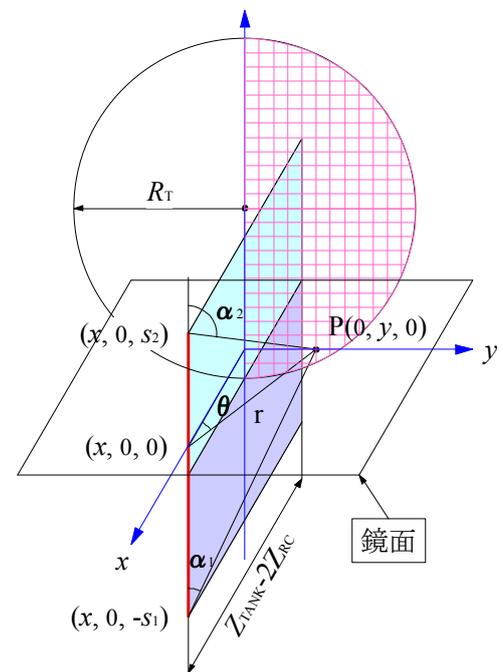


図 3.4 : リッジの電流による磁場を計算する為の座標系。 R_T は空洞半径、 x_0 は直線電流 I_0 の x 方向の位置。空色の部分がリッジの電流の流れる範囲で、幅はリッジ根元の長さ $Z_{TANK}-2Z_{RC}$ である。 s 方向の電流長はリッジ高さの2倍

インダクタンス L_T を求めた。空洞断面上のP点に於ける磁場は、図3.4に示すように、リッジの付け根の空洞壁に置いた鏡の鏡面対称のリッジ（薄紫）の先端から実リッジ（空色）の先端までの n 本の電流によって作られる磁場によって近似された。

図 3.4 の赤線で示す、長さ (s_1+s_2) の直線電流 I_0 が $(x, 0, 0)$ 点から半径 r の P 点に作る x 方向の磁場はビオサ・パールの法則から次のように与えられる。

$$H_x = \frac{I_0 y}{4\pi r^2} (-\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1) \quad (3.12)$$

ここで、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{r}{s_1}\right), \quad \alpha_2 = \pi + \tan^{-1}\left(-\frac{r}{s_2}\right)$$

n 本の電流が作るP点の磁場は(3.12)式の各々の電流が作る磁場を重ねて得られる。よって、P点の磁束は次式で与えられる。

$$\Delta\phi_x = \sum_{i=1}^n \frac{I_0 y}{4\pi r^2} (-\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1) \cdot \Delta s \cdot \Delta y \quad (3.13)$$

ここで、 n 本の電流の i 番目の位置は $x = i \times (Z_{\text{TANK}} - 2Z_{\text{RC}}) / n - (Z_{\text{TANK}} - 2Z_{\text{RC}}) / 2$ である。上式を図3.4のピンクのメッシュで示された断面積に渡って積分し、リッジの電流で割る事によって、下側のリッジによるインダクタンスが求められる。従って、上下リッジによる空洞全体のタンクインダクタンスはこれを2倍して次のようになる。

$$L_T = 2 \times \phi_x / n I_0 \quad (3.14)$$

ここでは、第2セルから第 N_C-1 セルまでの間の、 n 番目のセルのタンクインダクタンス $L_T(n)$ は近似的に一様であると仮定し、空洞全体のタンクインダクタンスを N_C-2 個の並列インダクタンスに分配し次のように求められた。

$$L_T(n) = (N_C - 2) L_T \quad (3.15)$$

一本のステムが作るインダクタンス L_S は、無限に長い直線電流が半径 R_S から Z_C までの領域に作る単位長当りのインダクタンスから、次式のように近似される。

$$L_S = \frac{\mu_0 Z_S}{2\pi} \ln\left(\frac{Z_C}{R_S}\right) \quad (3.16)$$

ここで、 Z_S はステム長、 Z_C はセル長、 R_S はステム半径である。 n 番目のセルのステムインダクタンスは、図 2.1 に示すように、(3.16)式のインダクタンスが隣り合うセルに並列に配分され、更に配分されたインダクタンスが直列に接続されたものと見なせる。よって、次式が与えられる。

$$L_s(n) = 4 \times \frac{\mu_0 Z_s}{2\pi} \ln \left(\frac{Z_c(n)}{R_s} \right) \quad (3.17)$$

3.2. 空洞の全長と空洞端の構造寸法

空洞の全長は前節で計算された軸方向のドリフトチューブ寸法と軸に沿った電圧分布を一様にするために必要なリッチ両端の構造寸法から決められる。リッチ両端の構造寸法は必要な磁場反転用切欠き面積をどの様に確保するかによって決められる。図 1.1 に示されるように、空洞の全長 Z_{TANK} は磁場反転用切欠き面積から決まる余分のタンク長 Z_{ET} と全セル長 Z_{TC} の和で与えられる。

$$Z_{TANK} = Z_{ET} + Z_{TC} + Z_{ET} \quad (3.18)$$

余分のタンク長 Z_{ET} は全セル長から空洞両端の Z_{RC} を差し引いた値が強度的に最小限必要なリッチ根元長 Z_{RB} より小さく成らないように付け加えられる。51-MHz IH の場合、必要な最小根元長は 9cm に取られている。

この節では、磁場反転用切欠き面積が軸方向の電圧分布を一様にするように決められた。軸方向の電圧分布を一様にする可変パラメータとして、エンドギャップ長 Z_{EG} とリッチ切欠き長 Z_{RC} が使われる。

3.3 等価回路による電圧分布の計算

IH リニアックの等価回路は図 3.5d に示すように二種類の伝送線回路から構成されている。一つは、空洞中央部の加速電極を線路とする回路で、各加速セルの集中定数共振回路が結合インダクタンス $2L_i$ を介して連結した伝送線である。もう一つは、空洞端部にある磁場が反転する空間を囲む回路、即ち、空洞端面とリッチ端面を線路とする回路である。図 3.5a に示すように、この線路は区分(1)から(4)の分布静電容量と分布インダクタンスからなる伝送線である。図 3.5a の等価回路が図 3.5d で表される過程が図 3.5b、図 3.5c に示されている。

伝送線の電圧、電流の方程式は次のように表わさ

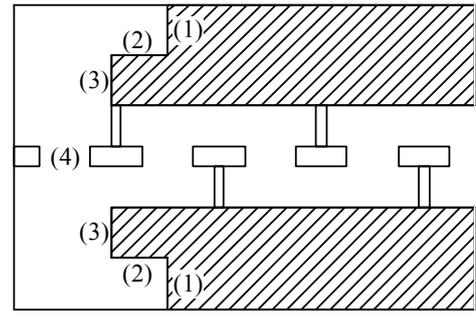


図 3.5a : IH 空洞端の構造。

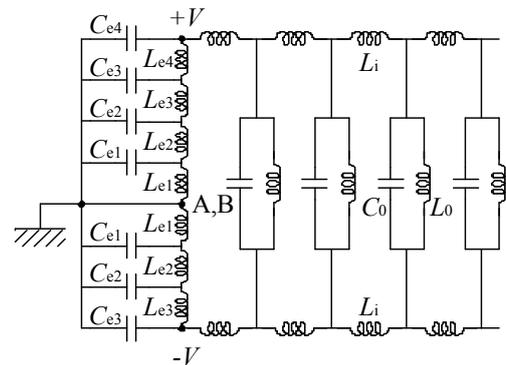


図 3.5b : LC 定数で置き換えた 3.5a 図。

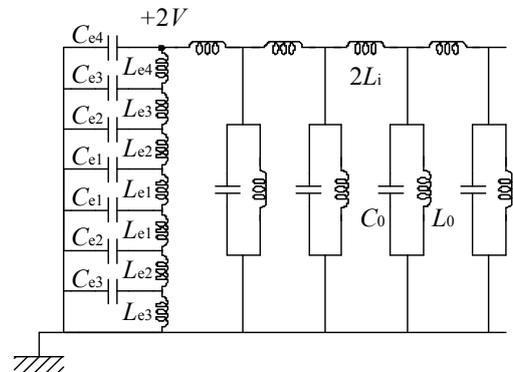


図 3.5c : -V をゼロに置き換えた 3.5b 図。

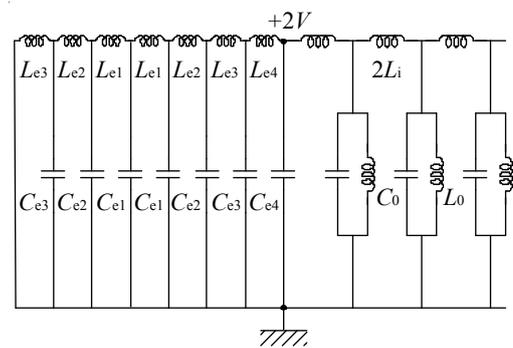


図 3.5d : 伝送線に書き換えた 3.5c 図。

れる。

$$V(l) = V_i \cosh \gamma l + Z_0 I_i \sinh \gamma l \quad (3.19)$$

$$I(l) = I_i \cosh \gamma l + (V_i/Z_0) \sinh \gamma l \quad (3.20)$$

ここで、 γ は伝播定数、 Z_0 は特性インピーダンス、 V_i 、 I_i は $l=0$ の位置での電圧、電流の値である。空洞端部を表わす伝送線の伝播定数と特性インピーダンスは次式で与えられる。

$$\gamma = j\omega\sqrt{L_e C_e} \quad (3.21)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_e}{C_e}} \quad (3.22)$$

他方、電極部を表わす伝送線の伝播定数と特性インピーダンスは次式で与えられる。

$$\gamma = \sqrt{\frac{L_c}{L_0} (1 - \omega^2 L_0 C_0)} \quad (3.23)$$

$$Z_0 = \omega \sqrt{\frac{-L_0 L_c}{1 - \omega^2 L_0 C_0}} \quad (3.24)$$

ここでは、結合インダクタンスは $L_c = 2L_i$ で表される。(3.19)、(3.20)式に(3.21)、(3.22)又は(3.23)、(3.24)式を代入し、初期条件を空洞始端で $V_i = 0$ 、 $I_i = 1$ とし、 l に沿って計算して行き、空洞終端で電圧がゼロになるように角周波数 ω を見つける。この周波数が空洞の共振周波数である。

3.3.1. 加速セルの共振回路と結合インダクタンス

n 番目の加速セルの共振回路定数は 3.1.1. と 3.1.2. 節で求めた $C(n)$ と $L(n)$ である。各セルの共振回路を結ぶ結合インダクタンス L_c (図 3.5d の $2L_i$ に相当) は、対向するリッジの両先端面を流れる電流路によって創られる。この L_c は「リッジの両先端面を逆方向に流れる電流は密度 I_d の無限に長い直線電流である」と仮定して計算された。軸方向から見たリッジ端面と対向リッジ端面を (x, y) 座標で図 3.6 のように定義し、リッジ端面と対向リッジ端面間を y 方向に走る磁束を計算する。リッジ端面の $(0, y)$ 点にある無限に長い電線 (電流 I_d) が $(x, 0)$ 点に作る磁場 H'_y は次のようになる。

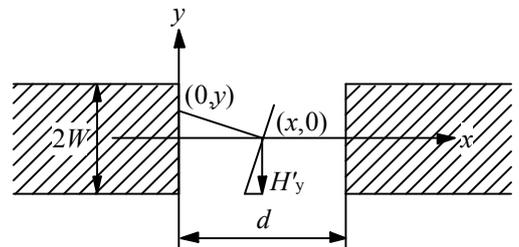


図 3.6: リッジ(左斜線部)端面の電流により対向境界面との間にできる磁束の計算。

$$H'_y = \frac{I_d}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3.25)$$

($x, 0$)の点での磁場の強さは、リッジ端面全体の電流によって決まるから、リッジ端面幅 $2W$ に渡って積分したもので次のようになる。

$$H_y = 2 \int_0^W H'_y dy = \frac{I_d}{\pi} \int_0^W \frac{x}{x^2+y^2} dy \quad (3.26)$$

磁束密度は $B_y = \mu_0 H_y$ であるから、リッジ端面と対向リッジ端面で囲まれた領域内の磁束は B_y をリッジ対向面間距離 d に渡って積分し、加速セル長 Z_c を掛ける事によって次のように求まる。

$$\phi' = Z_c \int_0^d B_y dx = \frac{\mu_0 Z_c I_d}{\pi} \int_0^d \int_0^W \frac{x}{x^2+y^2} dy dx = \frac{\mu_0 Z_c I_d}{2\pi} \left(W \log \frac{W^2+d^2}{W^2} + 2d \arctan \frac{W}{d} \right) \quad (3.27)$$

更に、リッジの両先端面を流れる電流によって作られる磁束 ϕ は ϕ' の2倍になる。

$$\phi = \frac{\mu_0 Z_c I_d}{\pi} \left(W \log \frac{W^2+d^2}{W^2} + 2d \arctan \frac{W}{d} \right) = L_c I = L_c 2W I_d \quad (3.28)$$

これから、 n 番目のセルの結合インダクタンスが次の近似式で与えられる。

$$L_c(n) = \frac{\mu_0 Z_c(n)}{2\pi W} \left(W \log \frac{W^2+d^2}{W^2} + 2d \arctan \frac{W}{d} \right) \quad (3.29)$$

3.3.2. 空洞端の静電容量

図 3.5a に示された空洞端部の区分(1)(2)(3)の静電容量 C_e を求める。各区分の C_e は図 3.7 に示された C_{e3} と同じ様に(3.3)と(3.4)式を使って求められる。但し、 C_2 は片面の値であるから(3.4)式の計算値の $1/2$ となる。 C_{e1} に関してはリッジ端面がアース面に接続しているため(3.3)式の値だけが採用された。区分(4)の静電容量は加速ギャップの静電容量で与えられる。

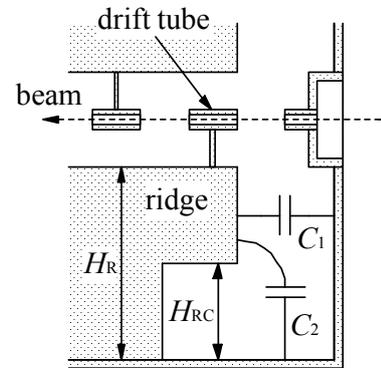


図 3.7: 区分(3)の静電容量 C_{e3} の構成図:

$$C_{e3} = C_1 + C_2$$

3.3.3. 空洞端のインダクタンス

空洞端部の区分(1)(2)(3)のインダクタンス L_e は

対応するリッジ端面と対向境界面で囲まれた領域内の磁束 $\phi = BS$ を、リッジ端面を流れる電流 I で割った値として近似的に求められる。この計算方法は 3.3.1 節で結合インダクタンスを求める際に使用した方法と同じである。それ故、区分(1)(2)(3)のインダクタンス L_e を表す式は結合インダクタンスを表す式と同じになり、次式で与えられる。

$$L_e = \frac{\mu_0 l_c}{2\pi W} \left(W \log \frac{W^2 + d^2}{W^2} + 2d \arctan \frac{W}{d} \right) \quad (3.30)$$

ここで、 l_c は区分の電流路長、 d はリッジ端面と対向境界面間の距離である。

区分(4)の部分のインダクタンスは第 1 ギャップを作るドリフトチューブのステムのインダクタンスであり、次式で与えられる。

$$L_{e4} = 2 \times \left[\frac{\mu_0 Z_s}{2\pi} \ln \left(\frac{Z_c}{R_s} \right) \right] \quad (3.31)$$

ここで、 Z_s は $Z_s = R_T - R_D - H_R$ で近似されたステム長で、 Z_c は加速電極のセル長、 R_s はステムの半径である。係数 2 は最初の加速セルに寄与する分と 2 番目の加速セルに寄与する分を考慮して決まる。

4. 高周波消費電力

空洞内で消費する高周波電力 P は加速ギャップ電圧 V_G と空洞各セルの並列共振抵抗 $R_p(n)$ を使って求められる。ここでは、先ず空洞各セルの $R_p(n)$ を求め、次に消費電力等を計算する。

4.1. 並列共振抵抗 R_p

空洞長が空洞径に比べて十分長い場合には、磁場反転用切欠き部を除いたリッジ長（リッジ根元長）も十分長くなり、その範囲では単位セル当たりの並列共振抵抗 R_p は次式で近似される。

$$R_p = \frac{L_0}{C_0} \left(\frac{R_1 + 2R_2}{2} + 2R_3 \right)^{-1} \quad (4.1)$$

ここで、 L_0 、 C_0 は単位セル当たりのタンクインダクタンスと電極の静電容量である。 R_1 、 R_2 、 R_3 は図 4.1 に示すように、赤線で示された電流に沿って与えられる、単位セル当たりの空洞内壁、リッジ側面、ステムの表面抵抗である。それらは次の様に表される。

$$R_1 = \frac{(\pi R_T - W_R)}{Z_c} r_s \quad (4.2)$$

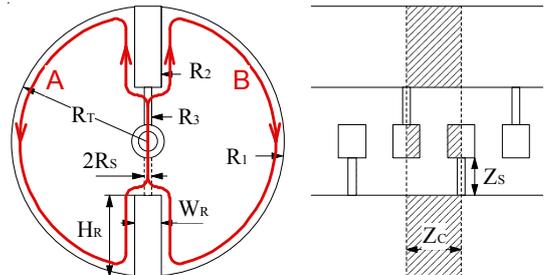


図 4.1 単位セル当たりの表面抵抗。

$$R_2 = \frac{(H_R + W_R/2)}{Z_C} r_s \quad (4.3)$$

$$R_3 = \frac{Z_S r_s}{\pi R_S} \quad (4.4)$$

ここで、 R_T は空洞タンクの半径、 W_R はリッチの幅、 H_R はリッチの高さ、 Z_C はセルの長さ、 Z_S はステムの長さ、 R_S はステムの半径である。 r_s は銅の表面の単位正方形当りの抵抗で次のように与えられる。

$$r_s = (\rho \pi f \mu_0)^{1/2} = 260 \times 10^{-9} f^{1/2} \quad (4.5)$$

上式の ρ は銅(20°C)の体積抵抗率で $1.72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 、 μ_0 は真空中の透磁率で $4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ である。

しかし、前節でも述べたように、実際の空洞では空洞長は空洞径に比べ同等か短くなり、リッチ根元長もリッチ全長に比べかなり短くなる。それ故、(4.1)式の単位セル当りの R_P から空洞全体の R_P を求める方法では空洞端の影響が無視できず実際の空洞全体の R_P との誤差が大きくなりすぎる。そこで、ここでは空洞端のセル（最初と最後のセル）の R_P とリッチ上に在るセルの R_P を分けて求める事にする。

4.1.1. リッチ上に在るセルの並列共振抵抗 R_P

リッチ上に在るセル当りの R_P は次のように求められる。図4.2に示す空洞内壁の表面抵抗を R_1 、リッチ側面の表面抵抗を R_2 とすると、単位セル当りのそれぞれの表面抵抗は、空洞両端のセルを除いたセル数を $N_C - 2$ とすると、近似的に $R_1 \times (N_C - 2)$ 、 $R_2 \times (N_C - 2)$ によって与えられる。更に、単位セルのステムを流れる電流に対する表面抵抗を R_3 とすると、セル当りの R_P は次式で与えられる。

$$R_P = \frac{L_0}{C_0} \left[\left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right) (N_C - 2) + R_3 \right]^{-1} \quad (4.6)$$

図4.2に示すように、 R_1 はリッチ全長の電流幅を持つ電流経路A又はBに沿った空洞内周の半分の表面抵抗で、次の様に表される。

$$R_1 = \frac{(\pi R_T - W_R) \cdot r_s}{(Z_{TC} - 2Z_{EG})} \quad (4.7)$$

R_2 は電流経路A又はBに沿った上下リッチの側面とリッチ対向面の表面抵抗で、次の様に表される。

$$R_2 = 2(R_{21} + R_{22} + R_{23}) \quad (4.8)$$

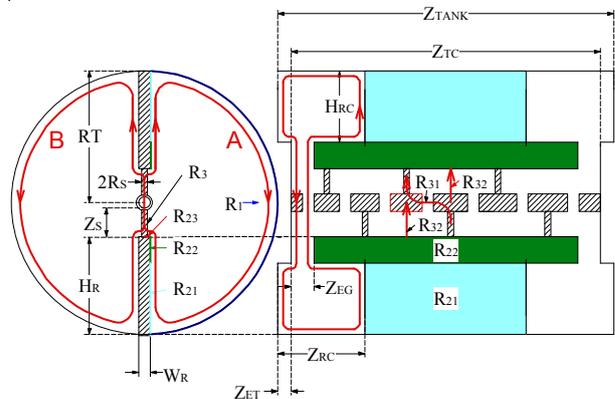


図4.2 空洞内各部の表面抵抗。

上式の R_{21} は図4.2の側面図で示した空色の部分の表面抵抗、 R_{22} は緑色の部分の表面抵抗、 R_{23} は断面図で示した、リッジ対向面の片面の半分の表面抵抗を表し、それぞれ次の様に与えられる。

$$R_{21} = \frac{H_{RC} \cdot r_S}{(Z_{TANK} - 2Z_{RC})} \quad (4.9)$$

$$R_{22} = \frac{(H_R - H_{RC}) \cdot r_S}{(Z_{TC} - 2Z_{EG})} \quad (4.10)$$

$$R_{23} = \frac{(W_R/2) \cdot r_S}{(Z_{TC} - 2Z_{EG})} \quad (4.11)$$

R_3 は電流経路AとBが合流してステムを流れる電流に対する表面抵抗で、単位セル当りでは次の様に表される。

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot C_1^2 + R_{32} \cdot C_2^2}{(C_1 + C_2 + C_3)^2} \quad (4.12)$$

ここで、 C_1 、 C_2 、 C_3 はそれぞれ単位セル当りのドリフトチューブ間静電容量、ドリフトチューブリッジ間静電容量、リッジ間静電容量を表し、図4.2の側面図で示した様に、 R_{31} はドリフトチューブ間を流れる電流経路の表面抵抗、 R_{32} はドリフトチューブリッジ間を流れる電流経路の表面抵抗である。 R_3 は2つの経路の表面抵抗にそれぞれの経路の静電容量で重みを付けて求められる。 R_{31} はステム長の2倍の距離をステム周長の半分の幅で流れる電流経路の表面抵抗、 R_{32} はステム長の距離をステム周長の幅で流れる電流経路の表面抵抗であるから、それぞれ次の様に表される。

$$R_{31} = \frac{2Z_S \cdot r_S}{\pi R_S} \quad (4.13)$$

$$R_{32} = \frac{Z_S \cdot r_S}{2\pi R_S} \quad (4.14)$$

故に、空洞両端のセルを除いた2番目から N_C-1 番目までのセルでの電力損失は(4.6)式の R_p と加速ギャップ電圧 V_G から次の様に求められる。

$$P = (N_C - 2) \cdot \frac{V_G^2}{2R_p} \quad (4.15)$$

4.1.2. 空洞両端のセルの R_p

空洞入口端の並列共振抵抗 R_p は図4.2の側面図に書かれた赤の電流閉回路に沿った表面抵抗 R_4 から近似的に次の様に求められる。

$$R_{P-END} = \frac{L_e}{C_e} R_4^{-1} \quad (4.16)$$

ここで C_e と L_e はそれぞれ図3.5dから次式で与えられる。

$$C_e = 2(C_{e1} + C_{e2} + C_{e3}) + C_{e4}$$

$$L_e = 2(L_{e1} + L_{e2} + L_{e3}) + L_{e4}$$

R_4 はリツヂの幅 W_R と同じ幅を持つ様な電流路を仮定して次の様に求められる。

$$R_4 = \frac{2(R_T + 2Z_{RC} - Z_{EG} + H_R) \cdot r_S}{W_R} \quad (4.17)$$

ここではステムの表面抵抗は無視されている。空洞出口端の R_p も同じと近似される。よって、空洞両端での電力損失は次のように求められる。

$$P = 2 \cdot \frac{(V_G/2)^2}{2R_{P-END}} \quad (4.18)$$

4.1.3. 空洞全体の電力損失

空洞全体の電力損失は各セルの電力損失の和として次のように与えられる。

$$P_{total} = \frac{(V_G/2)^2}{2R_{P-END}} + \frac{V_G^2}{2R_p(2)} + \frac{V_G^2}{2R_p(3)} + \dots + \frac{V_G^2}{2R_p(N_C - 1)} + \frac{(V_G/2)^2}{2R_{P-END}} \quad (4.19)$$

4.1.4. シャントインピーダンスと無負荷の Q 値

IH 空洞のシャントインピーダンスは次式で与えられる。

$$Z_{cavity} = \frac{(\text{全加速電圧})^2}{\text{全電力損失}} = \frac{[V_G \cdot (N_C - 1)]^2}{P_{total}} \quad (4.20)$$

タンク長を Z_{TANK} とすると単位長さ当たりのシャントインピーダンスは次のようになる。

$$Z_S = \frac{[V_G \cdot (N_C - 1)]^2}{P_{total} \cdot Z_{TANK}} \quad (4.21)$$

故に、IH 空洞の単位長当りの実効シャントインピーダンスは次式で与えられる。

$$Z_{eff} = Z_S T_F^2 = \frac{[V_G \cdot (N_C - 1)]^2}{P_{total} \cdot Z_{TANK}} T_F^2 \quad (4.22)$$

ここで T_F はトランジットタイムファクターである。

空洞の無負荷の Q 値は一般的に次式で与えられる。

$$Q_0 = \frac{\omega W_{total}}{P_{total}} \quad (4.23)$$

上式で、 ω は空洞の共振角周波数、 W_{total} は空洞に蓄えられる全エネルギー、 P_{total} は空洞内での全電力損失である。IH の場合、空洞に蓄えられる全エネルギー W_{total} は空洞端に蓄えられるエネルギーとリッジ上のギャップ間に蓄えられるエネルギーの和として、次の様に求められる。

$$Q_0 = \frac{\omega W_{total}}{P_{total}} = \frac{\omega \frac{1}{2} \left[Ce(V_G/4)^2 + \sum_{n=2}^{N_G-1} C(n) \cdot (V_G)^2 + Ce(V_G/4)^2 \right]}{P_{total}} \quad (4.24)$$

5. 51-MHz IH1, IH4 を使った計算モデルの検証

上記計算コード CADIH の計算モデルを検証するため、51-MHz IH1, IH4 の空洞特性（共振周波数、ビーム軸に沿った電圧分布、RF パワー損失等）が計算され実機の値と比較された。表 5.1 には 2 つの空洞の寸法パラメータが実機の値と計算で使った値に分けてまとめられている。計算で使ったパラメータの値は ZEG、ZRC、REC の値を除いて実機の値と同じである。ZEG、ZRC の計

表 5.1 : 51-MHz IH1, IH4 の実機の寸法パラメータと計算で使った寸法パラメータの比較表

寸法項目 (単位はメートル)	IH1		IH4	
	実機	計算	実機	計算
タンク半径(RT)	0.7445	0.7445	0.67	0.67
リッジ高(HR)	0.5445	0.5445	0.47	0.47
リッジ幅(WR)	0.08	0.08	0.08	0.08
リッジカット高(HRC)	0.4445	0.4445	0.37	0.37
入口・出口エントギャップ長(ZEG)	0.095, 0.095		0.095, 0.095	
平均エントギャップ長(ZEG)	0.095	0.0953	0.095	0.095
入口・出口リッジカット長(ZRC)	0.3115, 0.2782		0.42834, 0.445	
平均リッジカット長(ZRC)	0.29485	0.2948	0.43667	0.4367
リッジボトム長(ZRB)	0.091	0.091	0.66298	0.663
エントギャップ半径(REC)	0.2	0.2	0.2	0.0
ドリフトチューブ半径(RD)	0.019	0.019	0.026	0.026
ドリフトチューブ開口半径(A)	0.01	0.01	0.016	0.016
ステム半径(RS)	0.015	0.015	0.015	0.015
ギャップ長(ZG)	0.029	0.029	0.053	0.053

算で使った値は実機空洞の入口・出口両端の平均値である。IH4 の計算ではエンドキャップを付ける必要が無かったので、REC はゼロに設定された。計算で使った 2 つの空洞の縦断面図が図 5.1 と図 5.3 の中で実機の断面図と比較されている。計算で得られたビーム軸に沿った電圧分布は図 5.2 と図 5.4 の中で実測値の電場分布と比較されている。図 5.2、図 5.4 の計算結果の赤い点は加速セルの境界に位置しているので、各点の中間の値が各加速セルのギャップ電圧に相当している。更に、計算で得られた共振周波数等の RF 特性は表 5.2 の中で実測値と比較されている。

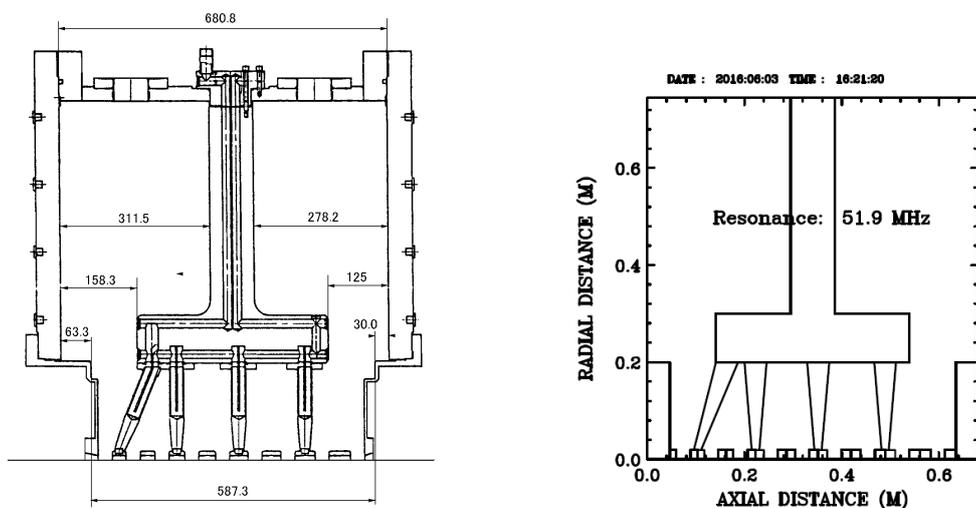


図 5.1 : 左が 51-MHz IH1 実機空洞 (半径は 0.7445m)、右が本計算で使った空洞の上部縦断面図である。右の空洞で計算された共振周波数は 51.9 MHz である。

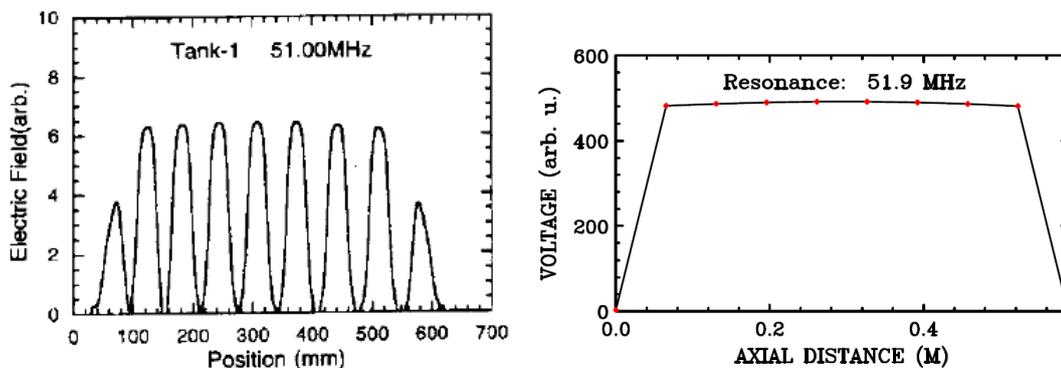


図 5.2 : 左は 51-MHz IH1 の加速ギャップの実測電場分布、右は計算で得られた共振時 (51.9 MHz) のギャップ電圧分布である。

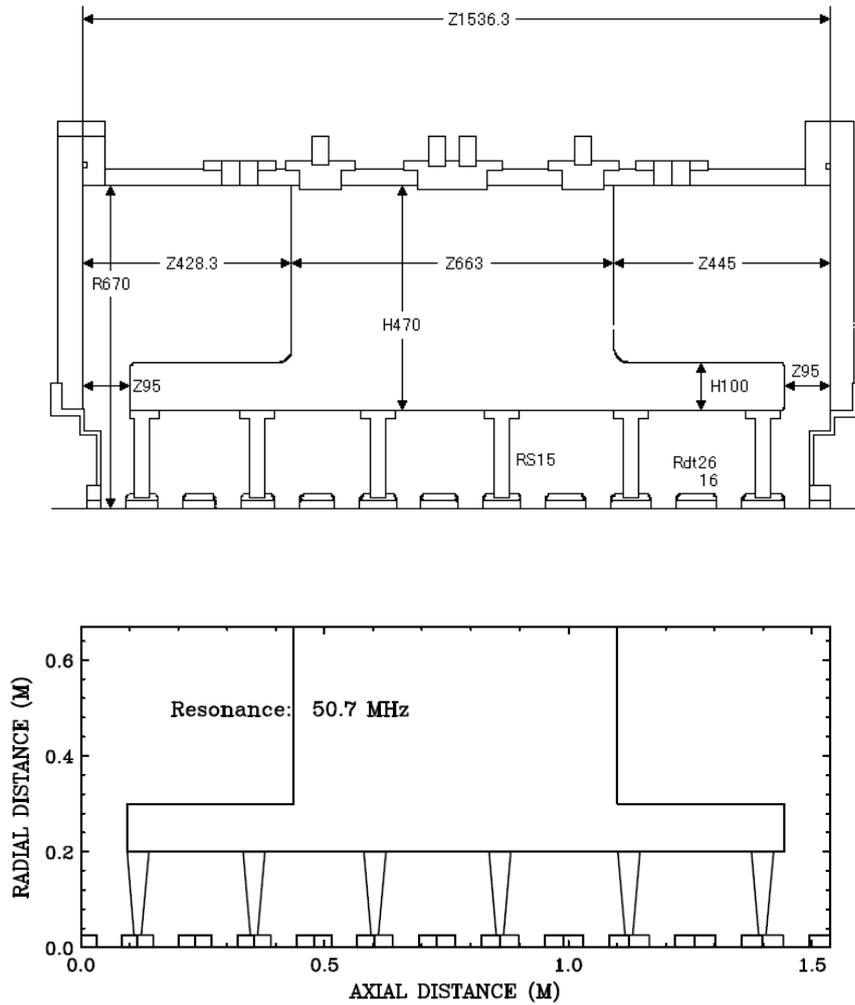


図 5.3 : 上が 51-MHz IH4 実機空洞 (半径は 0.67m)、下が計算で使った空洞の上部縦断面図。下の空洞で計算された共振周波数は 50.7 MHz である。

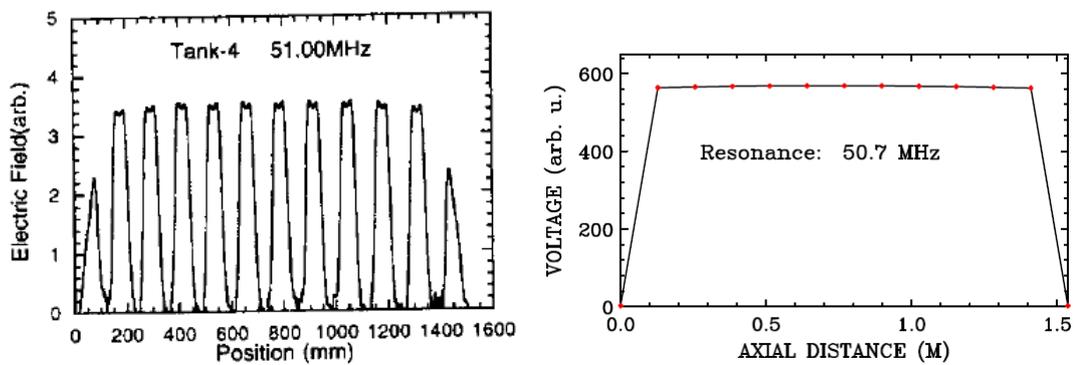


図 5.4 : 左は 51-MHz IH4 の加速ギャップの実測電場分布、右は計算で得られた共振時 (50.7 MHz) のギャップ電圧分布である。

表 5.2 : 51-MH IH1, IH4 空洞特性の測定値と計算値の比較

	IH1		IH4		単位
	測定値	計算値	測定値	計算値	
共振周波数 (f_{initial})	51.084	51.9	51.003	50.7	MHz
無負荷の Q 値 (Q_0)	10681	9990	18490	21100	
実効シャントインピーダンス (Z_{eff})	264	265	218	228	M Ω /m
電力損失 (P)	10.5	10.6	39	37.8	kW

6. まとめ

一般的な電磁気の式を使った解析的な計算コード CADIH によって、51-MHz IH1, IH4 空洞の基本的な構造寸法と高周波パラメータの関係がなり良く再現できた。表 5.2 から分かるように、測定値と計算値の間の誤差は、無負荷の Q 値を除いて、 $\pm 5\%$ 以内で一致した。よって、計算コード CADIH は IH 空洞を解析的に理解するのに役立つと共に、モデルテストを行う前の IH 空洞の基本的な構造を決めるのにも役に立つと思う。

謝辞

本報告書作成に対する和田道治氏のご支援に対し、著者は深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] S. Arai, Y. Arakaki and M. Tomizawa, "Performance Simulations of the TRIAC IH-Linac", KEK Report 2008-8, November 2008, A, Japanese.